

Chamäleons

In einem großen Terrarium leben ganz vergnügt einige Chamäleons. Und zwar 4 rote, 2 blaue und ein grünes. Diese Chamäleons haben eine merkwürdige Eigenschaft: Wann immer sich zwei Chamäleons verschiedener Farbe begegnen, nehmen beide die dritte Farbe an. Das heißt, wenn sich ein blaues und ein grünes Chamäleon begegnen, werden beide rot.

Frage: Kann es passieren, dass irgendwann alle Chamäleons die gleiche Farbe haben?

Zusatzfrage (schwieriger): Wie ist die Antwort, wenn zu Beginn 5 Chamäleons rot, 2 blau und eines grün ist?

Antwort:

Wenn sich ein rotes und ein blaues Chamäleon begegnen, entstehen 2 grüne. Daher gibt es anschließend jeweils 3 rote und 3 grüne Chamäleons, sowie ein blaues. Aus den 3 roten und 3 grünen Chamäleons werden 6 blaue. Damit sind alle Chamäleons blau.

Zur Zusatzfrage:

Wir betrachten die Anzahlen N_r , N_b und N_g der roten, blauen und grünen Chamäleons. Genauer gesagt betrachten wir die Differenzen dieser Zahlen. Zum Beispiel beschreibt die Differenz $N_r - N_b$ um wie viel sich die Anzahlen der roten und blauen Chamäleons unterscheiden.

Die entscheidende Beobachtung ist, dass jede Differenz durch die Begegnung von zwei Chamäleons entweder gleichbleibt oder sich so ändert, dass sie um genau 3 größer oder um 3 kleiner wird.

Dazu nehmen wir beispielsweise an, dass sich ein rotes und ein blaues Chamäleon begegnen. Bei dem Umfärbeprozess wird die Anzahl der roten und blauen Chamäleons um 1 erniedrigt und die der grünen um 2 erhöht: $N_r^* = N_r - 1$, $N_b^* = N_b - 1$, $N_g^* = N_g + 2$. Für die Differenzen gilt somit

$$N_r^* - N_b^* = (N_r - 1) - (N_b - 1) = N_r - N_b.$$

$$N_r^* - N_g^* = (N_r - 1) - (N_g + 2) = N_r - N_g - 3.$$

$$N_b^* - N_g^* = (N_b - 1) - (N_g + 2) = N_b - N_g - 3.$$

Diese technisch anmutende Aussage hat weitreichende Konsequenzen: Wenn eine Differenz zu Beginn kein Vielfaches von 3 ist, dann kann sie nie Null werden. Insbesondere können die beide Anzahlen nicht Null werden. Das heißt: Wenn keine der Differenzen ein Vielfaches von 3 ist, werden nie alle Chamäleons die gleiche Farbe haben.

Wenn die Anzahlen der Chamäleons 6, 2 und 1 wären, wären die Differenzen 4, 5 und 1; also würden nie alle die gleiche Farbe haben.

Bei den Zahlen 5, 2, 1 können alle Chamäleons gleichfarbig werden. Sie wissen bestimmt, wie das geht.