

Eine teilbare Zahl

Finden Sie die Zahl, die aus den neun Ziffern 1, 2, 3, ..., 9 besteht, wobei jede Ziffer genau einmal verwendet werden muss, und die die folgenden Eigenschaften hat:

Die erste Ziffer der Zahl ist durch 1 teilbar.

Die Zahl aus den ersten beiden Ziffern ist durch 2 teilbar.

Die Zahl aus den ersten drei Ziffern ist durch 3 teilbar.

Usw.

Die Zahl aus allen neun Ziffern ist durch 9 teilbar.

Tipp: Um eine erste Orientierung zu erhalten, überlegen Sie: Wo steht die 5? Wo stehen die geraden und wo die ungeraden Ziffern?

Antwort:

Es gibt eine einzige Zahl mit den geforderten Eigenschaften und diese lautet 381654729.

Erklärung:

Zunächst verschaffen wir uns eine grobe Orientierung. Da eine Zahl, die durch 5 teilbar ist, als Einerstelle eine 5 oder eine 0 haben muss, und da keine 0 vorkommt, muss an der fünften Stelle die 5 stehen. Ferner sind die Zahlen aus den ersten 2, 4, 6 oder 8 Ziffern durch 2 teilbar, also müssen deren Endziffern (an den Stellen 2, 4, 6, 8) gerade sein. Daher müssen an den Stellen 1, 3, 5, 7 die ungeraden Ziffern stehen. Daher sieht die gesuchte Zahl schematisch so aus:

Stelle	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ziffern	1	2	1	2	5	2	1	2	1
	3	4	3	4		4	3	4	3
	7	6	7	6		6	7	6	7
	9	8	9	8		8	9	8	9

Nun schauen wir uns die Zahlen aus den ersten vier bzw. den ersten acht Ziffern an. Diese Zahlen sind durch 4 teilbar. Das bedeutet, dass die Zahl aus ihren letzten beiden Ziffern durch 4 teilbar sein muss. Da die Zehnerziffern dieser Zahlen ungerade sind, sind das die Zahlen 12, 16, 32, 36, 52, 56 usw. in jedem Fall kommen für die 4. und 8. Stelle nur die Ziffern 2 und 6 in Frage. Somit stehen an den Positionen 2 und 6 die Ziffern 4 und 8.

Stelle	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ziffern	1	4	1	2	5	4	1	2	1
	3	8	3	6		8	3	6	3
	7		7			7		7	
	9		9			9		9	

Da die Zahlen aus den ersten 3 Ziffern und die Zahl aus den ersten 6 Ziffern durch 3 teilbar sind, muss auch die Zahl aus den Stellen 4, 5, 6 durch 3 teilbar sein. Dafür kommen nur die Kombinationen 258 und 654 in Frage.

Stelle	1	2	3	4, 5, 6	7	8	9
Ziffern	1	4	1	258	1	2	1
	3	8	3	654	3	6	3
	7		7		7		7
	9		9		9		9

Da die Zahl aus den ersten acht Stellen durch 8 teilbar ist, muss die Zahl aus ihren letzten drei Stellen, d.h. die Zahl aus den Stellen 6, 7, 8 durch 8 teilbar sein. Dafür gibt es nur folgende Möglichkeiten: 816, 832, 872, 896, 416, 432, 472, 496. Von diesen entfallen aber 832, 872 bzw. 416, 469, weil sonst die 2 bzw. die 6 doppelt vorkommen würde.

Stelle	1	2	3	4, 5, 6, 7, 8	9
Ziffern	1	4	1	25816	1
	3	8	3	25896	3
	7		7	65432	7
	9		9	65472	9

Nun muss auch die Zahl aus den Stellen 7, 8, 9 durch 3 teilbar sein. Dafür gibt es insgesamt nur fünf Möglichkeiten:

Stelle	1	2	3	4, 5, 6, 7, 8, 9
Ziffern	1	4	1	258963
	3	8	3	654321
	7		7	654327
	9		9	654723
				654729

Nun schauen wir noch auf die Zahl aus den Ziffern Nr. 1, 2, 3. Da diese durch 3 teilbar ist, gibt es die folgenden Möglichkeiten: 141, 147, 183, 189, 381, 387, 783, 789, 981, 989. Wenn man diese Kombinationen mit dem Rest der Zahl zusammensetzt und beachtet, dass keine Ziffer doppelt vorkommen darf, bleiben nur die folgenden zehn Möglichkeiten:

Stelle	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Ziffern	147258963
	183654729
	189654723
	189654729
	381654729
	741258963
	789654321
	981654327
	981654723
	987654321

Nur eine dieser Möglichkeiten, nämlich 381654729 hat die Eigenschaft, dass die Zahl aus den ersten sieben Ziffern durch 7 teilbar ist.