

Münzwurf mit dem Teufel

Der Teufel bietet mir ein Spiel an. Wir nehmen dazu eine Münze, und zwar eine, die absolut fair ist, also langfristig in 50% der Fälle Kopf und sonst Zahl zeigt. Bei dem Spiel geht es um drei aufeinanderfolgenden Münzwürfe und deren Ergebnisse. Diese können so etwas sein wie KKK, KZK, ZZK und so weiter. Insgesamt gibt es acht solche Folgen, und wenn man nur drei Mal würfelt, tritt jede dieser Folgen in genau $\frac{1}{8}$ der Fälle auf.

Nun flüstert mir der Teufel ins Ohr: „Du wählst Dir eine solche Folge aus drei Ergebnissen, dann wähle ich eine und dann würfeln wir so lange, bis eine unserer Folgen auftaucht. Wenn Deine Folge zuerst auftaucht, hast Du gewonnen, sonst ich.“

Ich ahne Schlimmes, aber fange einfach mal an und sage: „KKK“. Da kann der Teufel nur müde lächeln und zischt: „ZKK“.

Frage: Warum gewinnt der Teufel in der Mehrzahl der Fälle? Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er tatsächlich?

Zusatzfrage: Wenn ich ZZK setze oder ZKZ, was ist dann des Teufels Antwort?

Lösung:

Wenn die ersten drei Würfe KKK sind, habe ich gewonnen, in allen anderen Fällen der Teufel. Denn dann ist irgendwann Z gefallen und der Teufel muss nur warten, bis einmal eine Zahl gefolgt von zwei Mal Kopf erscheint. Das passiert bestimmt, bevor drei Mal Kopf kommt. Also gewinnt der Teufel in 7 von 8 Fällen, also mit einer Wahrscheinlichkeit von $7/8 = 87,5\%$.

Zur Zusatzfrage:

Auf ZZK antwortet der Teufel mit KZZ und gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von 75%.

Begründung: Wenn die beiden ersten Würfe ZZ sind, gewinne ich, denn ich muss nur warten, bis irgendwann mal K kommt.

In allen anderen Fällen gewinnt der Teufel. Genauer: Wenn irgendwann K fällt, bevor ich gewonnen habe, kann ich nicht mehr gewinnen. Denn entweder kommen zwei Z (und der Teufel hat gewonnen) oder es kommt ein K dazwischen – und dann wartet der Teufel wieder auf zwei Z.

Wenn ich ZKZ sage, sagt der Teufel ZZK und gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit $2/3$, also etwa 66%.

Das bedeutet, der Teufel gewinnt nicht immer mit der gleichen Wahrscheinlichkeit, aber er gewinnt immer!