Albrecht Beutelspachers Knobelaufgabe der Woche #14

Eine Zahl, die sich selbst beschreibt

Zugeschickt von Inesh Shaimerden

Die Originalaufgabe lautet: Gesucht ist eine 10-stellige Zahl, Die erste Ziffer ist die Anzahl der Nullen, die in dieser Zahl vorkommen, die zweite Ziffer die Anzahl der Einsen, die dritte die Anzahl der Zweien usw. Schließlich gibt die letzte Ziffer die Anzahl der Neunen an.

Wie lautet die Zahl?

Bemerkung: Es gibt auch Variationen der Aufgabe, die ein klein bisschen einfacher sind: Gesucht ist eine 7-stellige, eine 8-stellige und eine 9-stellige Zahl mit den entsprechenden Eigenschaften.

Antwort:

6210001000 bzw. 521001000 bzw. 42101000 bzw. 3211000

Erklärung:

Wir behandeln das Problem einer 7-stelligen Zahl.
Klar: Die Summe der Ziffern sagt, wie viele Ziffern insgesamt vorkommen, also ist die Summe der Ziffern 7.

Wir bestimmen nun Stelle für Stelle der Zahl. Dies scheint langwierig zu sein; machen Sie sich aber klar, dass sich bei jedem Schritt die Anzahl der Möglichkeiten um den Faktor 10 reduziert!

- Wir überlegen uns zunächst, dass die letzten drei Stellen Null sein müssen: Angenommen, die letzte Ziffer wäre nicht Null. Da diese Ziffer die Anzahl der Sechsen angibt, müsste irgendwo die Ziffer 6 stehen. Wenn diese 6 an der ersten Stelle stünde, gäbe es 6 Nullen, insgesamt also mindestens 8 Stellen: Widerspruch. Also steht die 6, wenn überhaupt, an einer anderen Stelle. Dann müsste eine von Null verschiedene Ziffer 6 mal vorkommen. Also wäre die Summe der Ziffern mindestens 6 + 6*1 = 12 – auch ein Widerspruch.
- Angenommen, die vorletzte Ziffer wäre verschieden von Null. Dann müsste irgendwo eine 5 stehen. Dies muss an der ersten Stelle stehen (sonst wäre die Summe der Ziffern größer als 7). Dann wären alle Ziffern außer der der ersten und vorletzten gleich Null. Weil die Summe der Ziffern 7 ist, muss die Ziffer an der vorletzten Stelle 2 sein. Das geht aber nicht, weil keine 2 Ziffern gleich 5 sein können.
- Angenommen, die drittletzte Ziffer wäre größer als Null. Diese müsste 1 sein (weil es keine zwei Vieren geben kann). Die 4 muss an der ersten Stelle stehen (sonst gäbe es mindestens vier Eisen, was der Summe der Ziffern widerspricht). Da schon mindestens eine 1 vorkommt, muss an der zweiten Stelle eine von Null verschiedene Ziffer stehen. Alle anderen Stellen sind dann Null. Also müsste an der zweiten Stelle eine 2 stehen – es gibt aber nur eine Eins!
- Insbesondere hat die gesuchte Zahl mindestens drei Nullen; daher ist die erste Ziffer mindestens 3.
- Angenommen, die viertletzte Ziffer (die auch die Anzahl der Vieren angibt) wäre Null. Dann gäbe es mindestens vier Nullen, also müsste an der ersten Stelle eine Ziffer ≥ 4 stehen. An den Stellen, an denen die Anzahlen der Vieren, Fünfen, Sechsen angezeigt werden, steht aber jeweils eine Null: Widerspruch!
  Also steht an der viertletzten Stelle eine Ziffer > 0. Diese kann aber nur 1 sein, denn sonst gäbe es mindestens zwei Vieren.
- Daher ist genau eine der ersten Stellen eine 3. Das kann nicht die dritte Stelle sein (es gibt keinen Platz für drei Zweien). Die 3 kann aber auch nicht an der zweiten Stelle stehen, denn weil die erste Ziffer mindestens 3 ist, gibt es auch nur Platz für höchstens zwei Einsen. Also ist die erste Ziffer eine 3.
- Daher gibt es genau drei Nullen. Weiterhin stehen an den Stellen 2 und 3 von Null verschiedene Ziffern. Wegen der Ziffernsumme müssen das die Ziffern 2 und 1 sein. Die 1 kann nicht an der zweiten Stelle stehen (weil es zwei Einsen gibt).

Somit lautet die gesamte Zahl 3211000.
Nach dem gleichen Schema kann man die Aufgabe für jede Zahl von Ziffern lösen.