Albrecht Beutelspachers Knobelaufgabe der Woche #4

Der perfekte Tee

Unsere Mathematikum-Mitarbeiterin Jördis Beck schrieb uns folgendes:

Ich habe eine Knobelaufgabe von meiner Oma bekommen, welche ich sehr interessant finde.

Aufgabe:
Für einen besonders edlen Tee müssen Sie exakt auf die richtige Zeit des Ziehens achten. Fünf Minuten sollen es sein. Sie haben aber nur zwei Sanduhren. Die eine läuft in drei Minuten durch, die andere in vier Minuten. Beide werden gleichzeitig umgedreht und sie laufen immer bis zum Ende durch. Können Sie es schaffen, fünf Minuten abzumessen?

Wie ist es, wenn man Sanduhren mit 3 Minuten und 7 Minuten verwendet?

Kann man mit diesen Sanduhren jede Anzahl von Minuten schaffen? Zum Beispiel auch Tee, der genau 8 Minuten braucht?

Und ein kleines Forschungsprojekt für kleine und große Tüftler: Vor Ihnen stehen viele Sanduhren in einem Regal. Die erste läuft in einer Minute ab, die zweite in zwei die dritte in drei Minuten usw. Kurz: Für jede natürliche Zahl a gibt es eine Sanduhr, die genau a Minuten braucht.

(a) Finden Sie zwei Sanduhren, mit denen man 5 Minuten garantiert *nicht* abmessen kann!
(b) Nehmen Sie zwei Sanduhren aus dem Regal. Können Sie schon an den Zeiten dieser Sanduhren erkennen, ob man mit ihnen jede Zeit stoppen kann?

Lösung:

Man beginnt damit, dass man beide Sanduhren umdreht. Wann immer eine Sanduhr abgelaufen ist, dreht man sie sofort wieder um, so dass sie ohne Verzögerung wieder von vorne anfängt. Die einzigen Zeitpunkte, die man erfassen kann, sind die Momente, in denen eine Sanduhr umgedreht wird. Mit der ersten Sanduhr misst man als die Zeitpunkte 0 Minuten, 3 Minuten, 6 Minuten, 9 Minuten usw. und mit der zweiten 0 Minuten, 4 Minuten, 8 Minuten usw.

Die Frage ist, ob zwischen irgendwelche dieser Zeitpunkte genau 5 Minuten liegen. Das ist klar: zwischen 3 und 8. Das heißt: man gießt den Tee genau dann auf, wenn die 3-Minuten Uhr zum ersten Mal umgedreht wird und holt den Beutel raus, wenn die 4-Minuten Sanduhr zu zweiten Mal umgedreht würde.

Mathematisch steckt die Gleichung $1 \cdot 3 + 5 = 2 \cdot 8$ beziehungsweise $5 = 2 \cdot 8 - 1 \cdot 3$ dahinter.

Frage: Wie würden Sie in der Sanduhrsprache die Gleichung $1 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4$ interpretieren?

Hinweis zum Forschungsprojekt:

Es kommt auf den größten gemeinsamen Teiler der beiden Zeiten an!

Nehmen Sie zunächst einmal an, dass die Zeiten der beiden Sanduhren den größten gemeinsamen Teiler 3 haben. Das könnten Sanduhren sein, die 6 Minuten und 9 Minuten laufen. Hat man eine Chance, mit diesen Sanduhren 5 Minuten abzumessen?
Es hängt davon ab, ob die beiden Zeiten als größten gemeinsamen Teiler die Zahl 1 haben oder ob dies eine größere Zahl ist.